



کد فرم : FR/FY/11

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

ویرایش : صفر

دانشکده ریاضی

مدرس : سیدرضا موسوی

نیمسال تابستان ۹۳

امتحان درس : ریاضی عمومی ۱-فنی

گروه آموزشی : ریاضی

وقت : ۱۲۰ دقیقه

تاریخ : ۱۳۹۳/۵/۲۶

شماره دانشجویی :

نام و نام خانوادگی :



توجه :

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

قسمتهایی که با مداد نوشته شده باشد چرکنویس محسوب می شود.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

۲۰ نمره

سوال ۱- اگر $a = \sqrt{3} + i$ و $b = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$ دو عدد مختلط باشند،مطلوب است مقادیر : $z_1 = a + \lambda b$, $z_2 = a^{\lambda} b$

۲۵ نمره

سوال ۲- حدهای مقابل را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \tan 2x - \tan^2 3x}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3 \cos x}{2 \sin x - x}$

۳۰ نمره

سوال ۳- نمودار تابع $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x - 3}$ را رسم کنید.سوال ۴- نقطه M روی ارتفاع وارد بر قاعده یک مثلث متساوی الساقین قرار دارد. طول قاعده مثلث برابر ۱۰ و طول ساق آن برابر ۱۳ است. اگر L مجموع فاصله های نقطه M از سه راس مثلث باشد ، کمترین مقدار L چقدر است ؟

۳۰ نمره

سوال ۵- انتگرال نامعین $\int \frac{2x+5}{(4x^2+1)(x^2-x+1)} dx$ را حل کنید.

۳۰ نمره

سوال ۶- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $f(x) = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$ و محور x ها در بازه $[0, \infty)$ را بیابید.

۳۰ نمره

سوال ۷- ناحیه محدود به نیمدایره $y = \sqrt{2-x^2}$ و سهمی $y = x^2$ را در نظر بگیرید.
(الف) اگر این ناحیه حول محور x ها دوران کند ، حجم جسم حاصل را بیابید.
(ب) اگر این ناحیه حول محور y ها دوران کند ، حجم جسم حاصل را بیابید.

۳۰ نمره

سوال ۸- (الف) همگرایی یا واگرایی هریک از سریهای $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ را مشخص کنید.
(ب) حوزه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} (x-1)^n$ را تعیین کنید.

موفق باشید

سوال ۱- برای محاسبه z_1 ، b را بر حسب مختصات دکارتی می نویسیم. $b = 2e^{\frac{\pi i}{3}} = 1 + \sqrt{3}i$

و در نتیجه: $z_1 = a + \lambda b = (\sqrt{3} + \lambda) + (1 + \lambda\sqrt{3})i$

برای محاسبه z_7 ، a را بر حسب مختصات قطبی می نویسیم. $a = \sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi i}{6}}$

و در نتیجه: $z_7 = a^{\lambda} b = (2e^{\frac{\pi i}{6}})^{\lambda} (2e^{\frac{\pi i}{3}}) = 2^{\lambda+1} e^{\frac{\Delta \pi i}{3}} = 2^{\lambda} e^{\frac{-\pi i}{3}}$

سوال ۲- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan x \tan 2x - \tan^3 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\tan x}{x} \times \frac{\tan 2x}{x} - \left(\frac{\tan 3x}{x} \right)^2 \right] = 1 \times 2 - 3^2 = -7$

برای محاسبه حد دوم، چون $x \rightarrow \infty$ می توانیم فرض کنیم $x > 3$ و از نامساویهای $1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$ نتیجه می گیریم:

$$\frac{2x-3}{-2-x} \geq \frac{2x-3\cos x}{2\sin x-x} \geq \frac{2x+3}{2-x}$$

و چون $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{-2-x} = -2$ ، داریم: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3\cos x}{2\sin x-x} = -2$ ، $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{2-x} = -2$

سوال ۳- اگر مخرج را برابر صفر در نظر بگیریم داریم $x^2 - 2x - 3 = 0$ و در نتیجه $x = -1, 3$

پس دامنه تابع عبارت است از: $D_f = R - \{-1, 3\}$

اگر $x \rightarrow -1, 3$ آنگاه $y \rightarrow \pm\infty$ پس تابع دو مجانب قائم $x = -1$ و $x = 3$ دارد.

چون $x \rightarrow \pm\infty$ آنگاه $y \rightarrow 1$ پس تابع یک مجانب افقی $y = 1$ دارد.

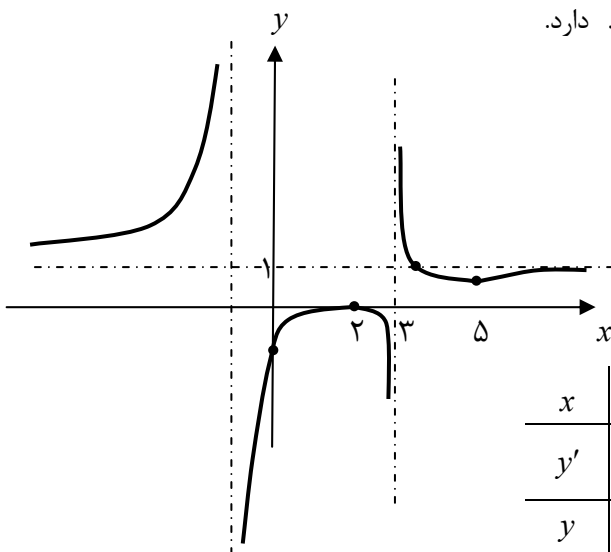
مشتق تابع را محاسبه می کنیم. $y' = \frac{2(x^2 - 7x + 10)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$

اگر $y' = 0$ آنگاه باید $x^2 - 7x + 10 = 0$ یعنی $x = 2, 5$

و نقاط $(2, 0)$ و $(5, \frac{3}{4})$ نقاط بحرانی تابع هستند.

اکنون جدول تغییرات را رسم می کنیم.

x	$-\infty$	-1	2	3	5	∞
y'		+	+	0	-	-
y	1	\nearrow	∞	\nearrow	0	\searrow
			∞	\searrow	$-\infty$	
				∞	\searrow	1



سوال ۴- مثلث متساوی الساقین ABC را رسم می کنیم. $AB = AC = 13$ ، $BC = 10$

ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می کنیم و نقطه M را بر روی آن در نظر می گیریم. داریم:

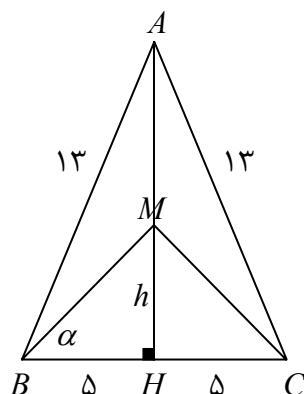
$$AH = 12, BH = CH = 5, L = AM + BM + CM$$

برای مشخص شدن موقعیت مناسب نقطه M باید یا مقدار $h = MH$ و یا مقدار $\alpha = \angle MBH$

را پیدا کنیم. به دو روش مساله را حل می کنیم.

روش اول (محاسبه h): داریم $L(h) = AM + BM + CM = 12 - h + 2\sqrt{h^2 + 25}$

اکنون از مشتق استفاده می کنیم. $L'(h) = -1 + \frac{2h}{\sqrt{h^2 + 25}}$



$$L'(h) = 0 \rightarrow -1 + \frac{2h}{\sqrt{h^2 + 25}} = 0 \rightarrow \sqrt{h^2 + 25} = 2h \rightarrow h = \frac{5}{\sqrt{3}} \rightarrow \text{Min} L = L\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = 12 + 5\sqrt{3}$$

$$L(\alpha) = AM + BM + CM = 12 - 5 \tan \alpha + \frac{10}{\cos \alpha}$$

روش دوم (محاسبه α): داریم

$$L'(\alpha) = \frac{-5}{\cos^2 \alpha} + \frac{10 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}, \quad L'(\alpha) = 0 \rightarrow \frac{-5}{\cos^2 \alpha} + \frac{10 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha} = 0$$

اکنون از مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\rightarrow 10 \sin \alpha = 5 \rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \text{Min} L = L\left(\frac{\pi}{6}\right) = 12 + 5\sqrt{3}$$

سوال ۵- ابتدا باید کسر $\frac{2x+5}{(4x^2+1)(x^2-x+1)}$ را تجزیه کنیم. مخرج کسر کاملاً تجزیه شده است.

$$\frac{2x+5}{(4x^2+1)(x^2-x+1)} = \frac{ax+b}{4x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

بنابر این حدس می‌زنیم:

ضرایب مجهول a, b, c, d را می‌توان به روشهای مختلف محاسبه کرد.

روش اول: اگر دو کسر سمت راست را با هم جمع کنیم داریم:

$$\frac{2x+5}{(4x^2+1)(x^2-x+1)} = \frac{(a+4c)x^2 + (-a+b+4d)x + (a-b+c)x + (b+d)}{(4x^2+1)(x^2-x+1)}$$

$$\begin{cases} a+4c=0 \\ -a+b+4d=0 \\ a-b+c=2 \\ b+d=5 \end{cases}$$

در نتیجه دستگاه معادلات مقابل به دست می‌آید.

با حل این دستگاه داریم: $a=8, b=4, c=-2, d=1$

روش دوم: همچنین می‌توانستیم به x چند مقدار متمایز نسبت داده و یک دستگاه معادله دیگر بسازیم.

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow b+d=5 \\ x=1 \rightarrow \frac{a}{5} + \frac{b}{5} + c + d = \frac{7}{5} \\ x=-1 \rightarrow \frac{-a}{5} + \frac{b}{5} - \frac{c}{3} + \frac{d}{3} = \frac{1}{5} \\ x=2 \rightarrow \frac{2a}{17} + \frac{b}{17} + \frac{2c}{3} + \frac{d}{3} = \frac{3}{17} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b+d=5 \\ a+b+5c+5d=7 \\ -3a+3b-5c+5d=3 \\ 6a+3b+34c+17d=9 \end{cases}$$

جواب این دستگاه، همان جواب قبلی است. یعنی: $a=8, b=4, c=-2, d=1$

روش سوم: دو طرف تساوی را در مخرج کسر اول ضرب کرده و هر جا x^2 دیدیم به جای آن $\frac{-1}{4}$ می‌گذاریم:

$$\frac{2x+5}{\frac{-1}{4} - x + 1} = ax + b \rightarrow \frac{4(2x+5)}{-4x+3} = ax + b$$

اکنون صورت و مخرج کسر حاصل را در مزدوج مخرج آن ضرب می‌کنیم.

$$ax + b = \frac{4(2x+5)(4x+3)}{(-4x+3)(4x+3)} = \frac{4(8x^2+26x+15)}{-16x^2+9} \xrightarrow{x^2=\frac{-1}{4}} ax + b = 8x + 4$$

$$\frac{2x+5}{(4x^2+1)(x^2-x+1)} = \frac{8x+4}{4x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

پس داریم:

تا اینجا تکلیف یک کسر روشن شده است. آن را به سمت چپ برده و عبارت را تا حد امکان ساده می کنیم.

$$\frac{2x+5}{(4x^2+1)(x^2-x+1)} - \frac{8x+4}{4x^2+1} = \frac{cx+d}{x^2-x+1} \rightarrow \frac{-2x+1}{x^2-x+1} = \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

یعنی $d=1$ ، $c=-2$. در این مرحله می توانستیم دو مقدار $x=0$ و $x=1$ را در تساوی قرار دهیم و مقادیر c و d را به دست بیاوریم. در هر صورت، اکنون کسر تجزیه شده است و می توانیم انتگرال را حل کنیم.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{(4x^2+1)(x^2-x+1)} dx &= \int \frac{8x+4}{4x^2+1} dx + \int \frac{-2x+1}{x^2-x+1} dx = \int \frac{8x}{4x^2+1} dx + 2 \int \frac{1}{(2x)^2+1} dx - \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx \\ &= \ln(4x^2+1) + 2 \arctan 2x - \ln(x^2-x+1) + c = \ln \frac{4x^2+1}{x^2-x+1} + 2 \arctan 2x + c \end{aligned}$$

سوال ۶- باید انتگرال $S = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$ را حل کنیم. آن را می توان با سه تغییر متغیر متفاوت حل کرد.

روش اول: از تغییر متغیر $t^2 = x^2 + x$ استفاده می کنیم. داریم $2t dt = (2x+1)dx$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}} = \int_0^{\infty} \frac{(2x+1)dx}{(2x+1)^2 \sqrt{x^2+x}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(2x+1)dx}{(4x^2+4x+1)\sqrt{x^2+x}} = \int_0^{\infty} \frac{2t dt}{(4t^2+1)\sqrt{t^2}} = \int_0^{\infty} \frac{2t dt}{(4t^2+1)} = \arctan 2t \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

روش دوم: از تغییر متغیر $\frac{1}{2 \sin t} = x + \frac{1}{2}$ استفاده می کنیم. داریم $\frac{1}{2 \sin t} = x + \frac{1}{2}$ و $\sin t = \frac{1}{2x+1}$

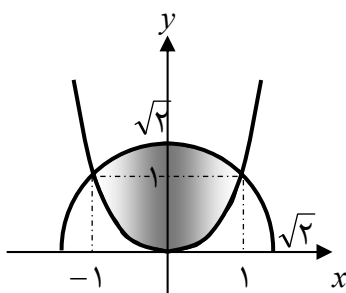
$$S = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2x+1} \times \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4 \sin^2 t} - \frac{1}{4}}} \times \frac{-\cos t}{2 \sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -dt = \frac{\pi}{2}$$

روش سوم: از تغییر متغیر $\frac{1}{2} \cosh t = x + \frac{1}{2}$ استفاده می کنیم. داریم $\frac{1}{2} \cosh t = x + \frac{1}{2}$ و $\sinh t dt = dx$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2x+1} \times \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh t} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \cosh^2 t - \frac{1}{4}}} \times \frac{\sinh t}{2} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh t} dt = \int_0^{\infty} \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{2e^t}{e^{2t} + 1} dt = 2 \arctan e^t \Big|_0^{\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

روش چهارم: داریم $S = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2(2+\frac{1}{x})\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$. اکنون از تغییر متغیر $t^2 = 1 + \frac{1}{x}$ استفاده می کنیم.

$$S = \int_0^{\infty} \frac{-2t dt}{(1+t^2)\sqrt{t^2}} = \int_1^{\infty} \frac{2t dt}{1+t^2} = 2 \arctan t \Big|_1^{\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$



سوال ۷- شکل تقریبی ناحیه مورد نظر را رسم می کنیم. یک ناحیه متقارن نسبت به محور y ها است.

(الف) روش اول (روش قرص مستدیر): اگر ناحیه مورد نظر حول محور x ها دوران کند، پوسته خارجی آن را نیمدایره و پوسته داخلی آن را سهمی می سازد. بنابر این حجم جسم حاصل برابر است با تفاضل حجم ساخته شده توسط نیمدایره و حجم ساخته شده توسط سهمی.

$$V = \pi \int_{-1}^1 [(\sqrt{2-x^2})^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^4) dx = \pi \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = 2\pi \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{44}{15} \pi$$

$$V = 4\pi \int_0^1 y \sqrt{y} dy + 4\pi \int_1^{\sqrt{2}} y \sqrt{2-y^2} dy$$

روش دوم (روش پوسته استوانه‌ای):

$$= 4\pi \left[\frac{2}{5} y^{5/2} \sqrt{y} \right]_0^1 + 4\pi \left[-\frac{1}{3} (2-y^2) \sqrt{2-y^2} \right]_1^{\sqrt{2}} = 4\pi \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{44}{15} \pi$$

ب) روش اول (روش قرص مستدیر): اگر ناحیه مورد نظر حول محور y ها دوران کند، قسمتی از پوسته خارجی آن را نیم‌دایره و قسمت دیگر پوسته خارجی آن را سهمی می‌سازد و پوسته داخلی هم ندارد. بنابر این حجم جسم حاصل برابر است با مجموع حجمهای ساخته شده توسط

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy + \pi \int_1^{\sqrt{2}} (\sqrt{2-y^2})^2 dy$$

نیم‌دایره و سهمی.

$$= \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2-y^2) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \pi \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \pi \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{6} \right)$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x [\sqrt{2-x^2} - x^2] dx = 2\pi \int_0^1 [x\sqrt{2-x^2} - x^3] dx$$

روش دوم (روش پوسته استوانه‌ای):

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3} (2-x^2) \sqrt{2-x^2} - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = 2\pi \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right] = \pi \left(-\frac{7}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right)$$

سوال ۸- الف) چون $n \geq 1$ پس $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ و در نتیجه $\sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$.

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست طبق آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ نیز همگراست.

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left. \frac{-1}{\ln x} \right|_1^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

تابع $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ در بازه $(2, \infty)$ مثبت و نزولی است و چون

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$$

یعنی انتگرال همگراست پس طبق آزمون انتگرال، سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ نیز همگراست.

ب) ناحیه همگرایی این سری تمام مجموعه اعداد حقیقی است. داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \div \frac{n!}{(2n)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{n!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(2n+1)} = 0$$

پس شعاع همگرایی برابر $R = \infty$ و ناحیه همگرایی تمام مجموعه اعداد حقیقی خواهد بود.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)(2n-1)(2n-2) \cdots (n+2)(n+1)}}$$

روش دوم (آزمون ریشه):

$$< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n \times n \times n \times \cdots \times n \times n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

یعنی $\frac{1}{R} = 0$ و شعاع همگرایی برابر $R = \infty$ و ناحیه همگرایی تمام مجموعه اعداد حقیقی خواهد بود.